

AA-1186
(005) B. Sc. Part-II (TWO)
Term End Examination, 2021-22
MATHEMATICS (Paper-III)

Time : 3 hours]

[Maximum Marks : 50

नोट— प्रत्येक इकाई से एक-एक प्रश्न चुनते हुए कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer five questions in all, selecting one question from each Unit. All questions carry equal marks.

इकाई-I / Unit-I

1. (a) रेखाओं $x + y = 1$, $y - x = 1$, $y = 2$ द्वारा निर्मित त्रिभुज की भुजाओं के अनुदिश तीन बल P, Q, R क्रियाशील हैं। उनके परिणामी की क्रिया रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।
 Three forces P, Q, R act along the sides of the triangle formed by the lines $x + y = 1$, $y - x = 1$, $y = 2$. Find the equation of the line of action of their resultant.
- (b) एक ठोस गोला उससे दुगुनी त्रिज्या के एक स्थिर रूक्ष अर्द्ध-गोल प्याले के अंदर रखा हुआ है। दर्शाइये कि गोले के उच्चतम बिंदु से कितना ही बड़ा वजनी एक भार संबंधित कर दिया जाये, साम्यावस्था स्थायी रहती है।
 A Solid Sphere rests inside a fixed rough hemispherical bowl of twice its radius. Show that, however, large a weight its attached to, the highest point of the sphere. The equilibrium is stable.
2. (a) दो बराबर एक समान छड़ें AB और AC , प्रत्येक की लम्बाई $2b$ है, A पर स्वतंत्रतापूर्वक जुड़े हुए हैं और त्रिज्या a के एक चिकने ऊर्ध्वाधर वृत्त पर विराम में हैं। दर्शाइए कि उनके बीच का कोण 2θ हो तो

$$b \sin^3 \theta = a \cos \theta$$

Two equal uniform rods AB and AC , each of length $2b$, are freely joined at A and rest on a smooth vertical circle of radius a . Show that if 2θ be the angle between them, then

$$b \sin^3 \theta = a \cos \theta$$

- (b) लम्बाई l के एक समांग चैन को समान क्षैतिज रेखा में दो बिंदुओं A तथा B से इस प्रकार लटकाया गया है कि प्रत्येक अन्तस्थ तनाव निम्नतम बिन्दु के तनाव का दुगुना है। दर्शाइए कि विस्तृति AB अवश्य ही

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} \log [n + \sqrt{n^2 - 1}]$$
 होनी चाहिए।

A uniform chain of length l , is to be suspended from two points A and B , in the same horizontal line so that the either terminal tension is n times that at the lowest point. Show

that the span AB must be $\frac{l}{\sqrt{n^2 - 1}} \log [n + \sqrt{n^2 - 1}]$.

इकाई-II / Unit-II

3. (a) किसी दिए गए बल-निकाय के केन्द्रीय अक्ष का समीकरण ज्ञात कीजिए।
 To find the equation of the central axis of any given system of forces.

- (b) एक बल z -अक्ष के समान्तर बिन्दु $(a,0,0)$ पर क्रिया करता है और एक बराबर बल z -अक्ष के लम्ब रूप बिन्दु $(-a, 0, 0)$ से क्रिया करता है। दर्शाइए कि बल निकाय का केन्द्रीय-अक्ष पृष्ठ $z(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 - ax)^2$ पर स्थित है।

A force parallel to the axis of z acts at the point $(a, 0, 0)$ and on equal force perpendicular to the axis of z acts at the point $(-a, 0, 0)$. Show that the central axis of the system lies on the surface $z(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 - ax)^2$.

4. (a) समतल $lx + my + nz = 1$ की शून्य विक्षेप स्थिति ज्ञात कीजिए।

To find the null point of the plane $lx + my + nz = 1$.

- (b) दर्शाइये कि किसी भी बल-निकाय की शून्य रेखाओं में से चार किसी अतिपरवलय के जनक होते हैं, दो जनकों के एक निकाय के सदस्य होते हैं और दो अन्य निकाय के।

Show that among the null lines of any system of forces four are generators of any hyperboloid, two belonging to one system of generation and two to the other system.

इकाई-III / Unit-III

5. (a) सरल आवर्त गति में, यदि किसी सरल रेखा पर एक स्थिर बिन्दु, जो बल केन्द्र नहीं है, से दूरियों a, b, c वेग u, v, w हो, तो दर्शाइये कि अवधि T निम्नलिखित समीकरण से दी जाती है—

$$\frac{4}{T^2} (b - c) (c - a) (a - b) = \begin{vmatrix} u^2 & v^2 & w^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

If in a S.H.M. u, v, w be the velocities at distances a, b, c from a fixed point on the straight line which is not the centre of force. Show that the period T is given by the equation :

$$\frac{4}{T^2} (b - c) (c - a) (a - b) = \begin{vmatrix} u^2 & v^2 & w^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

- (b) m द्रव्यमान का एक कण एक हल्के तार, जो दो स्थिर बिन्दुओं के बीच तना है और इसका तनाव T है, से बांध दिया गया है। यदि दोनों सिरों से कण की दूरियाँ a, b हैं तो सिद्ध कीजिए कि m द्रव्यमान के एक अल्प अनुप्रस्थ

दोलन का आवर्तकाल है— $2\sqrt{\frac{mab}{T(a+b)}}$.

A particle of mass m is attached to a light wire which is stretched tightly between two fixed points with a tension T . If a, b are the distances of the particle from the two ends, prove that

the period of a small transverse oscillation of mass m is $2\sqrt{\frac{mab}{T(a+b)}}$.

6. (a) एक कण एक समान कोण सर्पिल $r = ae^m$ पर अचर वेग से गतिमान है। ध्रुवान्तर रेखा और उसके लम्ब रूप दिशा में वेग और त्वरण के घटकों को ज्ञात कीजिए।

A particle describes an equiangular spiral $r = ae^m$ with a constant velocity. Find the components of velocity and acceleration along the radius vector and perpendicular to it.

- (b) m द्रव्यमान का एक पिण्ड एक स्थिर बिन्दु से आकाश में क्षैतिज से कोण बनाते हुए u वेग से फेंका जाता है, तो यह सिद्ध करना है कि प्रक्षेप्य का पथ एक परवलय है।

A particle of mass m is projected from a fixed point into the air with velocity u in a direction making an angle with the horizontal, prove that the path of the projectile is a Parabola.

इकाई-IV / Unit-IV

7. (a) एक कण केन्द्रीय त्वरण $= \frac{\mu}{(\text{दूरी})^2}$ के अन्तर्गत गति प्रारम्भ करता है— यह दूरी R से वेग v से प्रक्षिप्त की जाती

है। यदि प्रक्षेप कोण $\sin^{-1} \frac{u}{VR V^2 - \frac{2\mu}{R}^{1/2}}$ है तो दर्शाइये कि पथ एक आयताकार अतिपरवलय है।

A particle moves with a central acceleration $= \frac{\mu}{(\text{distance})^2}$, it is projected with velocity v at a distance R . Show that its path is a rectangular hyperbola if the angle of projection is

$$\sin^{-1} \frac{u}{VR V^2 - \frac{2\mu}{R}^{1/2}} .$$

- (b) शीर्ष से आरम्भ होकर परवलीय कक्ष की किसी दी गई चाप को निर्मित करने का समय ज्ञात कीजिए।
To find the time of describing a given arc of parabolic orbit starting from the vertex.

8. (a) एक बिन्दु समतल वक्र पर इस प्रकार गतिमान है कि उसका स्पर्शरेखीय तथा अभिलाम्बिक त्वरण बराबर है तथा स्पर्श रेखा का कोणीय वेग अचर है। वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए।

A point moves in a plane curve, so that its tangential and normal accelerations are equal and the angular velocity of the tangent is constant. Find the equation of the curve.

- (b) एक कण ऊर्ध्वाधर समतल में एक दिए हुए रूक्ष वक्र पर गुरुत्व के अन्तर्गत नीचे की ओर खिसकता (अर्थात् नीचे की ओर गति करता है), गति ज्ञात कीजिए।

A particle slides down a rough curve in a vertical plane under gravity, to discuss the motion.

इकाई-V / Unit-V

9. (a) कोई कण गुरुत्व के अन्तर्गत, एक माध्यम जिसका अवरोध वेग के वर्ग के अनुक्रमानुपाती है, x दूरी पर गिरता है। यदि कण द्वारा प्राप्त वास्तविक वेग v हो, इसके द्वारा प्राप्त v_0 वह वेग है जबकि कोई अवरोधी माध्यम नहीं होता तथा गतिमान वेग V हो तो, दर्शाइये कि

$$\frac{v^2}{v_0^2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{V^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} - \frac{v_0^4}{V^4} - \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{v_0^6}{V^6} + \dots$$

A particle falls from rest under gravity through a distance x in a medium whose resistance varies as square of the velocity. If v be the velocity actually acquired by it, v_0 the velocity it would have acquired, had there been no resisting medium and V the terminal velocity, show that

$$\frac{v^2}{v_0^2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{V^2} + \frac{1}{2} \frac{v_0^4}{V^4} - \frac{1}{2} \frac{v_0^6}{V^6} + \dots$$

- (b) किसी ऊर्ध्वाधर तल में एक चिकने तार पर एक छल्ला एक अवरोध, जो वेग के वर्ग के अनुक्रमानुपाती है, के अन्तर्गत गति करता है। गति ज्ञात कीजिए।

A bead moves on a smooth wire in a vertical plane under the resistance which varies as square of the velocity : to discuss the motion.

10. (a) वर्षा की एक बूँद, जो स्वतन्त्रतापूर्वक गिर रही है, प्रत्येक क्षण आयतन में एक वृद्धि, जो उस क्षण पृष्ठ का गुणा है, ग्रहण करती है, t समय पश्चात् वेग ज्ञात कीजिए तथा t समय में गिरी हुई दूरी भी ज्ञात कीजिए।

A spherical raindrop, falling freely, receives in each instant an increase of volume equal to times its surface at that instant; find the velocity at the end of time t , and the distance fallen through in that time.

- (b) एक कण एक चिकने गोले पर केवल पृष्ठ के दबाव के अन्तर्गत (अन्य कोई बल नहीं) गतिमान है। दर्शाइये कि इसका पथ समीकरण $\cot \theta = \cot \theta_0 \cos \phi$ द्वारा प्राप्त होगा, जहाँ θ और ϕ कण के कोणीय निर्देशांक हैं।

A particle moves on a smooth sphere under no forces except the pressure of the surface, show that its path is given by the equation $\cot \theta = \cot \theta_0 \cos \phi$, where θ and ϕ are its angular coordinates.